岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第22号(2015年) 78頁～82頁

拡張した算術乗法九九表の性質とその総和

富永 雅 ＊
中村 登 ＊＊

研 究 の 要 約

小学校第2学年で学習する乗法九九での算数的活動としては、乗法九九表に潜むきまりを発見する探究的な活動が設定されている。本稿では、そのきまりに注目し、より発展的に捉え、拡張した九九表の代数的構造を考察し、実践にいかせるようにその理論を提供したい。更に、これまでにも九九表の中に存在する値の総和の算出法については知られているが、得られた性質に着目し、より簡潔に総和を算出する方法について考察する。

key-word : 乗法九九、乗法九九表、性質と総和

1 はじめに

万葉集 第十一巻 二五四二 は次の通りである：

若草乃 新手枕乎 巻始而 夜哉将間 二八十一不在國
(若草の 新手枕を まきそめて 夜をや隔てむ
憎くあらなくに)

万葉集は、その詳細に不明な点があるとされながらも奈良時代にまとめられたことが知られている。上記はその中の一つであり、「八十一」部分は「(に) くく」と読み、万葉集に『算術乗法九九 (九九)』が使用されている一例としてよく知られている。もっとも、『九九』に関しては、2010年に奈良文化財研究所が平城宮の官庁街、東方官衙跡 (8世紀) を調査し、「一九如九 $(1 \times 9 = 9)$」と表記された習書木簡が見つかり、より時代をさかのぼることが出来る。また、この発見では、「如」(積が一桁の場合に挿入されたとみられる) の字を使う表記が古代中国算術書『孫子算経』と同様であることから、中国からの伝来を示す最古の資料として注目されている (平安時代の教科書『口遊 (くちずさみ)』では「一九々」などと表現されている)。その他、特徴的なこととしては、当時の九九は現代と違って「九九 八十一、八九 七十二 ⋯」と続けられ、出土品には、冒頭部分のみ書かれているものも多い。尚、その後の『九九』の拡がりに関しては、[1] 等に詳しい。また『九九』は、古代中国の文献にも記載されており [3] に詳しい。

さて、小学校第2学年で学習する『九九』を一覧表にしたものは『乗法九九表 (九九表)』として知られ、この表を当該学年で確実に習得することは極めて重要であり、後の学習、除法や小数・分数計算にも多大な影響を与える。幸い、日本では、数字を数種の読みで表現できる (例：「8」はち、は、はっ、ぱ) ので語呂良く表現でき習得率を高める一因となっている。加えて、学習指導要領では、『九九表』を単に覚えるだけでなく、「乗法九九の表を構成したり観察したりして，計算の性質やきまりを見付ける活動」、小学校学習指導要領解説 算数編では、探究的活動として「九九表に潜むきまりを発見する」事がねらいとして設定され、算数的活動が求められている。

そこで本稿では、『九九表』に関する決まりに注目する。特に、『九九表』に留まらず、掛けられる数が $m_1, \ldots, m_2$、掛ける数が $n_1, \ldots, n_2$ (ただし、$m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$、$m_1 \leqq m_2$、$n_1 \leqq n_2$) の拡張した表を扱う。その表を『$[(m_1, m_2), (n_1, n_2)]$ 表』($m_1 = 1$、$n_1 = 1$ の場合はそれぞれ『$[m_2, (n_1, n_2)]$ 表』、『$[(m_1, m_2), n_2]$ 表』と略す。特に、$m_1 = n_1 = 1, m_2 = n_2 = 9$ の場合は『$[9, 9]$ 表』、つまり、『九九表』となる) と表すことにする。

	n_1	$\cdots$	n	$\cdots$	n_2
m_1	$m_1 \times n_1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$m_1 \times n_2$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	$\cdots$	$\cdots$	$m \times n$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m_2	$m_2 \times n_1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$m_2 \times n_2$

また、この表の積部分を行列と同様にみなし、掛けられる数が m、掛ける数が n に対応する積 $m \times n$ 部分を m 行 n 列成分 (m, n) で表す。本稿で扱う『九九表』の性質に関しては、数学的証明まで範疇に入れると算数の学習に留まらず、中学校・高等学校数学の学習内容として取り上げる事もできる。

＊ 大阪教育大学 実践学校教育講座
＊＊ 岡山大学 大学院 教育学研究科

2　『乗法九九表』の性質【I】－小学校算数『九九表』の性質とその発展

はじめに、小学校算数で扱われる『九九表』の性質について次の通り確認する：

【I-1】 乗数と積の関係（同数累加）: 乗数 (被乗数) が 1 増えると積は被乗数 (乗数) ずつ増える。
【I-2】 交換法則 ($a \times b = b \times a$) :『＼』(表中左上から右下) 方向の対角成分に関して線対称に位置する成分は、(a, b), (b, a) である。
【I-3】 分配法則 ($(a+b) \times c = a \times c + b \times c$) : $(a+b)$ 行成分の値は、a 行成分と b 行成分の値の和になる (列に関しても同様)。
【I-4】 値は 36 種あり、多様な 2 数の積で表される値がある。(例 : $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2$(4 通り))
【I-5】 『＼』方向の対角成分上の値は、自然数の 2 乗で表される。

ここで、【I-1】、【I-2】に関して次の結果を与える。まず、【I-1】に関連して次の性質が成り立つ：

【I-6】『$[(m_1, m_2), (n_1, n_2)]$ 表』において m', m'', n が $m_1 \leqq m' \leqq m'' \leqq m_2$, $n_1 \leqq n \leqq n_2$ を満たすとき、

$$((m', n) \text{ 成分値}) + ((m'', n) \text{ 成分値}) = ((m' + k, n) \text{ 成分値}) + ((m'' - k, n) \text{ 成分値})$$

但し、k は、$\max\{m_1 - m', m'' - m_2\} \leqq k \leqq \min\{m_2 - m', m'' - m_1\}$ を満たす整数である。特に、$m'' - m'$ が偶数のとき $m' + k_0 = m'' - k_0$ となる $k = k_0$ が存在し $((m', n)$ 成分値$) + ((m'', n)$ 成分値$) = 2((m' + k_0, n)$ 成分値$)(= 2((m'' - k_0, n)$ 成分値$))$ となる。

【I-2】の結果に関して、次が得られる：

【I-7】『$[(m, m+l), (n, n+l)]$ 表』において、k, h が $0 \leqq k, h \leqq l$ をみたすとき、2 つの成分 $(m+h, n+k)$ と $(m+k, n+h)$ とは『＼』方向の対角線に関して線対称の関係にあり、それらの成分の値が一致するための必要十分条件は $m = n$ である。

『／』(表中右上から左下) 方向の対角成分に関して、次の性質が得られる：

【I-8】『九九表』において、『／』方向の対角成分に関して線対称に位置する成分値の一の位の数字は一致する。

【I-8】の結果は、次のように拡張される：

【I-9】『$[(m, m+l), (n, n+l)]$ 表』において、k, h が $0 \leqq k, h \leqq l$ をみたすとき、2 つの成分 $(m+h, n+k)$ と $(m+l-k, n+l-h)$ とは『／』方向対角成分に関して線対称の関係にあり、それらの一の位の数字が一致するための必要十分条件は、$m + n + l \equiv 0$ (mod10) である。

【I-9】	$n+k$	$\cdots$	$n+l-h$
$m+h$	$(m+h, n+k)$	$\cdots$	$(m+h, n+l-h)$
$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$
$m+l-k$	$(m+l-k, n+k)$	$\cdots$	$(m+l-k, n+l-h)$

尚、【I-9】の証明では、

$$(m+l-k)(n+l-h) - (m+h)(n+k) = (l-k-h)(l+m+n)$$

に注意する。

点対称の関係についても『九九表』では次が得られる：

【I-10】『九九表』の成分 (5, 5) に関して点対称に位置する 2 つの成分の一の位の数字は一致する。

この【I-10】は、次のように拡張される：

> 【I-11】『$[(m-l,m+l),(n-l,n+l)]$ 表』 $(0<l<\min\{m,n\})$ において、k,h が $-l \leqq k,h \leqq l$ のとき、2 つの成分 $(m+k,n+h)$ と $(m-k,n-h)$ とは、(m,n) に関して点対称の関係にあり、それらの一の位の数字が一致するための必要十分条件は、$m,n \equiv 0 \pmod 5$ である。

尚、表の行と列の数がともに偶数、つまり、『$[(m-l,m+l+1),(n-l,n+l+1)]$ 表』の場合、【I-11】は成り立たない。事実、表の中央には、次の 4 数が集まる。

(m,n)	$(m,n+1)$
$(m+1,n)$	$(m+1,n+1)$

ここで対称に位置する数の 1 の位の数字が一致すると仮定すると、$(m+1)(n+1)-mn=m+n+1\equiv 0 \pmod{10}$ かつ $(m+1)n-m(n+1)=n-m\equiv 0 \pmod{10}$ でなければならず、このとき $2m+1\equiv 0 \pmod{10}$ となり矛盾が生じる。

3 『九九表』の性質やきまり【II】－その他の『九九表』の性質とその拡張

『九九表』には、前節で述べた他に関心ある性質がある。本節では、その性質や拡張について述べる。

『九九表』は、【I-5】での通り 2 乗数に関する性質を持つが、3 乗数に関する性質も持ち合わせている：

> 【II-1】『$[m,m]$ 表』を下図の通り逆 L 字型に区切ったとき、その中に現れる成分の値の和は、左上から順に $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, m^3$ となる。

【II-1】	1	$\cdots$	k	$\cdots$	m
1	1	$\cdots$	$(1,k)$	$\cdots$	(1,m)
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
k	$(k,1)$	$\cdots$	(k,k)	$\cdots$	(k,m)
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
m	$(m,1)$	$\cdots$	(m,k)	$\cdots$	(m,m)

尚、【II-1】は、$2(k+2k+3k+\cdots+(k-1)k)+k^2 = 2(1+2+3+\cdots+(k-1))k+k^2 = 2\cdot\frac{1}{2}(k-1)k\cdot k+k^2 = k^3$ より明らか。

次に、『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』の 4 隅の成分 (m_1,n_1), (m_2,n_1), (m_1,n_2), (m_2,n_2) に関して、次が成り立つ：

> 【II-2】『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』において、左上 (m_1,n_1) と右下 (m_2,n_2) との成分の値の積は、左下 (m_2,n_1) と右上 (m_1,n_2) との成分の値の積に等しい。
>
> 【II-3】『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』において、4 隅の成分の和は、(表外に位置する) (m_1+m_2,n_1+n_2) 成分の値に等しい。

尚、【II-2】は、$(m_1n_1)(m_2n_2)=(m_1n_2)(m_2n_1)$ より明らか。実際には、表中の任意の長方型を形成する 4 隅の成分に関して同様の結果が得られる。また、【II-3】は、$m_1n_1+m_1n_2+m_2n_1+m_2n_2=(m_1+m_2)(n_1+n_2)$ より明らか。 特に、$m_1=n_1=1$ のとき、右下成分の更に 1 つ右下（つまり、成分 (m_2+1,n_2+1)）に 4 数和 $m_2n_2+m_2+n_2+1$ が現れる。

本節の最後に『$[(m,m+k),(n,n+k)]$ 表』（正方型）に関して次の興味ある事実を考察する：

> 【II-4】『$[(m,m+k),(n,n+k)]$ 表』において、4 隅の成分 (m,n), $(m+k,n)$, $(m+k,n+k)$, $(m,n+k)$（次の表中の　部分）を縦と横にそれぞれ s だけ中心方向に移動（→ 印）させた後（次の表中の　部分）、反時計回り（時計回りでもよい）に t だけ移動（⇒ 印）させる（次の表中の　部分）。このとき、元の 4 隅の成分を表す数の和と、移動後の 4 成分を表す　の和は等しい。但し、s,t は、非負整数であり、$s+t\in\{0,1,2,\cdots,k\}$ を満たす。

【II-4】は、次式から明らかである：

$$
\begin{aligned}
&(m+s+t)(n+s) + (m+k-s)(n+s+t) \\
&\quad + (m+k-s-t)(n+k-s) \\
&\quad\quad + (m+s)(n+k-s-t) \\
&= 4mn+2km+2kn+k^2 \\
&= mn + (m+k)n + (m+k)(n+k) + m(n+k).
\end{aligned}
$$

【II-4】	n	$\cdots$	$n+s$	$\cdots$	$n+s+t$	$\cdots$	$n+k-s-t$	$\cdots$	$n+k-s$	$\cdots$	$n+k$
m											
$\vdots$		$\searrow$								$\swarrow$	
$m+s$								$\Leftarrow$			
$\vdots$			$\Downarrow$								
$m+s+t$											
$\vdots$											
$m+k-s-t$											
$\vdots$									$\Uparrow$		
$m+k-s$				$\Rightarrow$							
$\vdots$		$\nearrow$								$\nwarrow$	
$m+k$											

尚、$m=n$ のとき、4成分の和は、$(2m+k)^2(=(2n+k)^2)$ となる。また、[5] では、$m=n=1$, $k=2l-2$ ($l=1,2,\ldots$) の場合に関する説明が記載されている。

4 『乗法表』の各成分の値の総和

『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』には、$(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)$ 個の成分が存在する。本節では、その値の総和を算出することを目的とする。勿論、『九九表』程度であれば、逐次加算計算していくことも可能である。しかし、拡張した表では、その手法は現実的でない。

そこで総和の算出の為の手法を 2 つ述べる：

【III-1】『$[m,m]$ 表』において各成分の総和は、次により得られる：

$$1^3+2^3+\cdots+m^3.$$

【III-2】『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』において各成分の総和は、次により得られる：

$$(m_1+(m_1+1)+\cdots+(m_2-1)+m_2)$$
$$\times(n_1+(n_1+1)+\cdots+(n_2-1)+n_2).$$

【III-1】は、【II-1】より導かれる。また、【III-2】において、$m_1=n_1=1$, $m_2=n_2=m$ とすると、表は『$[m,m]$ 表』となるので【III-1】より、次の等式が得られる：

$$1^3+2^3+\cdots+m^3=(1+2+\cdots+m)^2.$$

【II-4】を用いると『$[(m,m+k),(n,n+k)]$ 表』において次が導かれる：

【III-3】『$[(m,m+k),(n,n+k)]$ 表』において各成分の総和は、次により得られる：

$$\frac{1}{4}(\text{成分の個数})\times(4\text{ 隅の成分の和})$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(2m+k)(2n+k)$$

【III-3】は、【II-4】(とその証明) より 4 隅の成分の和 $(2m+k)(2n+k)$ が表中に $\frac{1}{4}(k+1)^2$ 個存在することから得られる。尚、k が偶数の場合、表の中央の成分 $(m+\frac{k}{2},n+\frac{k}{2})$ が 4 隅の成分の和の $\frac{1}{4}$ であることに注意する。

次に、より拡張した表である『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』での総和の算出法を紹介する：

【III-4】『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』において各成分の総和は、次により得られる：

$$(\text{成分の個数})\times(4\text{ 隅の成分和の平均})$$
$$=\frac{1}{4}(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)(m_1+m_2)(n_1+n_2).$$

事実、『$[(m_1,m_2),(n_1,n_2)]$ 表』の任意の列 $n\in\{n_1,n_1+1,\cdots,n_2-1,n_2\}$ において【I-6】より $k=1,2,\ldots,m_2-m_1$ に対して

$$((m_1,n)\text{ 成分値}) + ((m_2,n)\text{ 成分値})$$
$$= ((m_1+k,n)\text{ 成分値}) + ((m_2-k,n)\text{ 成分値}).$$

よって、総和の算出に当たり (m_1,n) 成分と (m_2,n) 成分との算術平均 $\frac{1}{2}(m_1+m_2)n$ で第 n 列の全ての成分の値を置き換えてもよい。更に、同様の置き換えを他のすべての列に適用した後、置き換えられた成分の値を用いて、すべての行 $m \in \{m_1, m_1+1, \cdots, m_2-1, m_2\}$ で、先の列と同様の置き換えを行う。このとき、(m,n_1) 成分と (m,n_2) 成分との値の算術平均は、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(m_1+m_2)n_1}{2}+\frac{(m_1+m_2)n_2}{2}\right)$$
$$=\frac{(m_1+m_2)(n_1+n_2)}{4}$$

なので、この乗法表に現れる全成分の値は $\frac{1}{4}(m_1+m_2)(n_1+n_2)$ となる。一方、成分の数は、$(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)$ 個なので、求める総和は、$\frac{1}{4}(m_2-m_1+1)(n_2-n_1+1)(m_1+m_2)(n_1+n_2)$ となる。

上記において $\frac{(m_1+m_2)(n_1+n_2)}{4}$ は、「(元の) 表の中央に位置する数」になるので次が得られる：

【III-5】『乗法表』において各成分の総和は、次により得られる：

(成分の個数) × (表の中央に位置する数).

ただし、行（または列）の数が偶数の場合、表の中央に位置する行（または列）の 2 つ（但し、行の数と列の数とが共に偶数の場合は 4 つ）の成分値の算術平均をとる。

尚、【III-1】から【III-5】の手法による『九九表』に現れる数の総和は、次の通りである：

【III-1】 $1^3+2^3+\cdots+9^3=2025$
【III-2】 $(1+2+\cdots+8+9)^2=45^2=2025$
【III-3】 $\frac{1}{4}(8+1)^2(1+1+8)^2=2025$
【III-4】 $\frac{1}{4}(9-1+1)(9-1+1)(1+9)(1+9)=2025$
【III-5】 $9\cdot 9\times 25=2025$

参考文献

[1] 安藤毅, 「九九」の拡がり, 北星学園大学経済学部北星論集 (**41**)2002, 79–101.

[2] 古藤怜　算数・数学的活動の愉しさ〜かけ算九九表の探究を通して〜, 理数啓林 (1)2013, 19-20.

[3] 小林澄子, 古代中国の九九について, 数理解析研究所講究録 (**1625**)2009, 144–153.

[4] 守屋誠司, 教科指導法シリーズ 小学校指導法 算数, 玉川大学出版部 (2011).

[5] 知的好奇心をくすぐる (!?) 教材 33 『掛け算九九に潜む性質を発見するための、色の工夫』, `http://www.esnet.ed.jp/center/shiryo/uploads/H22_sugaku_support_33.pdf`.

(平成２７年９月３０日受理)